Глава 4

Предел функции

В этой главе основное внимание уделено понятию предела функции. Определено, что такое предел функции в бесконечности, а затем предел в точке, пределы справа и слева. Во второй части изучаются классические для теории пределов теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших величинах. Третья часть посвящена теореме о единственности предела, теоремам о пределах суммы, произведения и частного двух функций. Теоремы о пределах обычно крайне полезны при решении задач. В четвертой части изучаются первый и второй замечательный пределы.

4-1 Понятие предела функции

Выберем произвольную функцию и попытаемся понять, куда стремится значение функции, если значение аргумента стремится к определенному числу. Рассмотрим, например, функцию:

$$y = \frac{5x^2 + 3}{3x + 1}$$

Если $x \to 1$, то мы можем подставить это значение в выражение для функции и найти ее значение:

$$\text{если } x \to 1, \text{то } \; y \to \frac{5 \cdot 1^2 + 3}{3 \cdot 1 + 1} = 3$$

Сделаем вывод, что предел рассматриваемой функции при *x*, стремящемся к 1, равен 3. Очевидно, что в такой ситуации нашего интуитивного представления о пределе функции вполне достаточно для нахождения предела и более формализованного определения не требуется.

Если рассмотреть более сложную ситуацию, когда, скажем, рассматривается функция:

$$y = \frac{5x^2 - 5}{3x - 3}$$

нахождение предела подстановкой в выражение функции значения аргумента $x = 1$ приведет нас к неопределенности вида: $\frac{0}{0}$:

$$y = \frac{5 \cdot 1^2 - 5}{3 \cdot 1 - 3} = \frac{0}{0}$$

Это приводит к необходимости рассматривать строгое формализованное определение предела функции.

Предел функции в бесконечности

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при *x стремящемся к бесконечности*, если для любого, даже сколь угодно малого положительного ε, найдется такое число M (зависящее от ε), что для всех x таких, что $|x| > M$, выполнено неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Число A называется **пределом функции** *y* **= f(***x***) при** *x* → ∞, если для любого, даже сколь угодно малого положительного ε, найдется такое число M (зависящее от ε), что для всех x, по абсолютной величине больших M, выполнено неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

На языке кванторов определение предела функции в бесконечности запишется следующим образом:

$$A = \lim_{x\to\infty} f(x)\,, \text{если } \forall\varepsilon > 0\ \exists M\colon\ \forall|x| > M\ \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

Предел функции в точке

Имеется также определение предела функции, при стремлении аргумента к определенному значению a, называемого *пределом функции в точке*. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to a$, если функция определена в некоторой окрестности точки a (кроме, может быть, самой точки a) и для любого, даже сколь угодно малого положительного ε > 0, найдется такое число δ > 0 (зависящее от ε), что для всех x из δ-окрестности точки a, выполнено неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Число A называется **пределом функции** *y* **= f(***x***) при** *x* → ***a***, если для любого, даже сколь угодно малого положительного для любого, даже сколь угодно малого ε > 0, найдется такое число δ > 0 (зависящее от ε), что для всех *x* из δ-окрестности точки *a*, выполнено неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Это определение называется определением на языке ε и δ, предложено французским математиком Огюстеном Коши и используется с начала XIX века по настоящее время, поскольку обладает необходимой математической строгостью и точностью.

Коши Огюстен Луи
(Cauchy, 1789–1857)

Французский математик. Член Парижской АН (1816). Окончил Политехническую школу (1807) и Школу мостов и дорог (1810) в Париже. В 1810-13 работал инженером в Шербуре. В 1816-30 преподавал в Политехнической школе и Коллеж де Франс. С 1848 в Парижском университете и в Коллеж де Франс. Работы Коши относятся к различным областям математики и математической физики. Его курсы анализа ("Курс анализа", 1821, "Резюме лекций по исчислению бесконечно малых", 1823, "Лекции по приложениям анализа к геометрии", т. 1-2, 1826-28), основанные на систематическом использовании понятия предела, послужили образцом для большинства курсов позднейшего времени. В них он дал определение понятия непрерывности функции, чёткое построение теории сходящихся рядов, определение интеграла как предела сумм.

Источник: Проект Рубрикон.

Запишем на языке кванторов определение предела функции в точке:

$$A = \lim_{x\to a} f(x),$$

если $\forall\varepsilon > 0 \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Пример 4-1. Предел функции в точке. Доказать, что:

$$\lim_{x\to 1}(3x + 1) = 4$$

Воспользуемся определением предела. Необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

$$|(3x + 1) - 4| < \varepsilon$$

Оно эквивалентно неравенству:

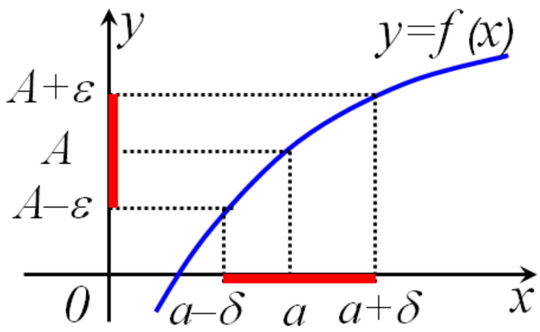
$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = \varepsilon/3$, тогда для всех значений аргумента, для которых выполняется неравенство $|x - 1| < \delta$, будет справедливо:

$$|(3x + 1) - 4| = |3(x - 1)| < \varepsilon$$

Это означает в свою очередь, что:

$$\lim_{x\to 1}(3x + 1) = 4$$



$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

$$a-\delta < x < a+\delta$$

$$A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$$

Рисунок 4-1. Геометрический смысл предела функции.

Геометрический смысл предела функции в точке

Выясним, в чем заключается геометрический смысл предела функции в точке. Построим график функции $y = f(x)$ и отметим на нем точки $x = a$ и $y = A$.

Предел функции $y = f(x)$ в точке $x \to a$ существует и равен A, если для любой ε-окрестности точки A можно указать такую δ-окрестность точки a, что для любого x из этой δ-окрестности значение $f(x)$ будет находиться в ε-окрестности точки A.

Отметим, что по определению предела функции в точке для существования предела при $x \to a$ не важно, какое значение принимает функция в самой точке a. Можно привести примеры, когда функция не определена при $x = a$ или принимает значение, отличное от A. Тем не менее, предел может быть равен A.

Односторонние пределы

Кроме определения обычного предела функции в точке возможно также дать определение понятия *одностороннего предела*: определить, что представляет собой предел справа и предел слева.

Пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$ *слева* называется предел, вычисляемый в предположении, что $x \to a$, оставаясь все время меньше значения a. Аналогично, пределом справа называется предел функции $f(x)$ при $x \to a$, при том, что $x > a$. Односторонние пределы обозначаются так:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \text{ и } \lim_{x\to a+0} f(x)$$

Односторонним пределом функции называется предел справа или предел слева.

4-2 Бесконечно малые и бесконечно большие

Особое место при изучении пределов функций и доказательству теорем относительно их свойств отводится такому важному понятию как бесконечно малые и бесконечно большие величины.

Бесконечно малая величина

Функция $y = \alpha(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x \to a$ (или при $x \to \infty$), если ее предел равен нулю.

Бесконечно малой величиной называется функция, предел которой равен нулю.

Запишем определение бесконечно малой на языке кванторов:

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0,$$

$$\text{если } \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0 \colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$$

Пример 4-2. Бесконечно малая величина. Следующая функция является бесконечно малой при $x \to 3$:

$$f(x) = x - 3$$

Это следует из того, что значения функции уменьшаются при приближении аргумента к значению 3 и предел этой функции в точке 3 равен нулю. Отметим, что при других значениях аргумента эта функция бесконечно малой не является.

Связь бесконечно малой с пределом функции

Теорема 4-1. Если функция $f(x)$ при $x \to a$ имеет предел, равный A, то ее можно представить в виде суммы предела A и бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \to a$:

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

Доказательство. По определению предела функции $f(x)$ при $x \to a$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0 \colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Это означает, что разность $f(x) - A$ есть бесконечно малая величина, которую мы можем обозначить $\alpha(x)$. Отсюда:

$$f(x) - A = \alpha(x) \Rightarrow f(x) = A + \alpha(x)$$

Легко доказать, что обратное утверждение тоже верно. Если функция может быть представлена в окрестности некоторой точки как сумма некоего числа A и бесконечно малой, тогда предел этой функции в этой точке равен числу A.

В целом, если предел некоторой функции $f(x)$ равен A, это означает, что величина $(f(x) - A)$ есть бесконечно малая.

Свойства бесконечно малых

Теорема 4-2 (сумма бесконечно малых величин). Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми, то их сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малая.

Доказательство. Пусть ε - произвольное положительное число. Так как функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые, то найдутся такие числа δ_1 и δ_2, что при $0 < |x - a| < \delta_1$ и $0 < |x - a| < \delta_2$ имеют место неравенства:

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Обозначим через δ наименьшее из двух чисел δ_1 и δ_2. Тогда при $0 < |x - a| < \delta$ будет выполнено:

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Этим доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при $0 < |x - a| < \delta$ выполнено неравенство: $|\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon$, сумма бесконечно малых есть бесконечно малая.

Следствием теоремы является ее распространение на случай алгебраической суммы любого конечного числа бесконечно малых.

Теорема 4-3 (произведение бесконечно малой величины на ограниченную величину). Произведение бесконечно малой величины на ограниченную величину есть бесконечно малая величина.

Доказательство. Пусть $f(x)$ – ограниченная при $x \to a$ функция, а $\alpha(x)$ бесконечно малая. Тогда существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \le M$

для всех x, достаточно близких к a. Для $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что при условии $0 < |x - a| < \delta$ одновременно выполняются неравенства:

$$|f(x)| \leq M$$

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Составим произведение:

$$|f(x) \cdot \alpha(x)| = |f(x)| \cdot |\alpha(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Этим доказано, что произведение бесконечно малой на ограниченную величину есть бесконечно малая. Две следующие теоремы являются прямым следствием этого утверждения.

Теорема 4-4 (произведение бесконечно малой на постоянную величину). Произведение бесконечно малой на постоянную величину есть бесконечно малая величина.

Теорема 4-5 (произведение двух бесконечно малых величин). Произведение двух бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.

Поскольку постоянная величина и бесконечно малая величина являются ограниченными, то их произведение с бесконечно малой величиной также является бесконечно малой величиной.

Теорема 4-6 (частное от деления бесконечно малой величины на переменную, имеющую предел). Частное от деления бесконечно малой величины на переменную величину, стремящуюся к пределу, не равному нулю, есть бесконечно малая величина.

Бесконечно большая величина

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при $x \to a$ (или при $x \to \infty$), если для любого, даже сколь угодно большого числа $M > 0$ найдется δ (зависящее от M), что для всех x таких, что $0 < |x - a| < \delta$, выполнено неравенство: $|f(x)| > M$. Бесконечно большая величина больше любого наперед взятого большого числа.

Бесконечно большой величиной называется переменная величина, абсолютное значение которой неограниченно возрастает.

Пример 4-3. Бесконечно большая величина. Следующая функция является бесконечно большой при $x \to 2$:

$$\alpha(x) = \frac{3}{x-2}$$

Это следует из того, что значения функции неограниченно возрастают при приближении аргумента к значению 2.

Пишут обычно:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Можно заметить также, что односторонние пределы не равны:

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{3}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{3}{x-2} = +\infty$$

Поэтому можно записать также:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3}{x-2} = \pm\infty$$

Связь бесконечно малых с бесконечно большими величинами

Теорема 4-7 (связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами).

(1) Если α *(x)* – бесконечно малая, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ бесконечно большая.

(2) Если β *(x)* – бесконечно большая, то $\frac{1}{\beta(x)}$ бесконечно малая.

Доказательство. (1) Выберем $M > 0$ и обозначим $\frac{1}{M} = \varepsilon$. Так как $\alpha(x)$ бесконечно малая, то числу $\varepsilon > 0$ соответствует $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x-a| < \delta$ выполняется неравенство:

$$|\alpha(x)| < \varepsilon = \frac{1}{M}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{|\alpha(x)|} > \mathrm{M}$$

Эта величина является бесконечно большой.

(2) Выберем ε > 0 и обозначим $\frac{1}{\varepsilon} = M$. Так как $\beta(x)$ бесконечно большая, то числу M соответствует δ > 0, такое, что при $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство:

$$|\beta(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{|\beta(x)|} < \varepsilon$$

Эта величина является бесконечно большой.

Пример 4-4. Бесконечно малые и бесконечно большие. Функция $f(x) = x^2 - 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$, и при этом бесконечно большой является функция:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Сравнение бесконечно малых величин

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$- бесконечно малые при $x \to a$. Если разделить одну бесконечно малую на другую, их частное может и не быть бесконечно малой. Например, если $\alpha(x) = 3x$ и $\beta(x) = x$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x} = 3$$

Говорят, что предел отношения двух бесконечно малых есть *неопределенность типа* $\frac{0}{0}$. В зависимости от того, какие бесконечно малые рассматриваются, этот предел может быть равен нулю, любому действительному числу или бесконечности. Например:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{x^2} = \infty$$

Если отношение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ двух бесконечно малых величин само бесконечно мало, то $\alpha(x)$ называют величиной *более высокого порядка малости*, чем $\beta(x)$, а $\beta(x)$ называют величиной *более низкого порядка малости*, чем $\alpha(x)$.

Если отношение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ двух бесконечно малых величин стремится к конечному пределу, не равному нулю, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми *одного порядка малости*.

Если отношение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ двух бесконечно малых величин стремится единице, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными* и пишут: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Бесконечно малая величина $\alpha(x)$ имеет **более высокий порядок малости** по сравнению с $\beta(x)$, если $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ есть бесконечно малая величина.

Бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют **одинаковый порядок малости**, если отношение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ имеет конечный предел, не равный нулю.

Бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ **эквивалентны**, если предел отношения $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ равен единице.

Эквивалентность некоторых важных бесконечно малых величин доказана и используется для вычисления пределов функций. В частности, эквивалентными являются следующие бесконечно малые:

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$$

$$1-\cos \alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$$

$$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$$

$$(1+\alpha(x))^p-1 \sim p \cdot \alpha(x)$$

Этот перечень принято называть таблицей эквивалентности для бесконечно малых функций и оформлять в виде таблицы. При вычислении пределов одни бесконечно малые можно заменять на другие.

Пример 4-5. Вычисление предела функции заменой эквивалентных бесконечно малых. Вычислим предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{arctg} x^2}$$

Для вычисления воспользуемся эквивалентностью бесконечно малых и заменим их на бесконечно малые, с которыми проще проводить вычисления:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{arctg} x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$$

4-3 Теоремы о пределах

Теоремы о бесконечно малых дают возможность довольно легко доказать теоремы о пределах функций, которые, в свою очередь, упрощают вычисление пределов функций.

Единственность предела функции

Теорема 4-8 (единственность предела функции). Функция не может иметь в одной точке два различных предела.

Доказательство. Действительно, пусть одновременно:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=B$$

Тогда представим функцию, согласно теореме, доказанной выше, в виде суммы предела и бесконечно малой:

$$f(x)=A+\alpha(x)$$

$$f(x)=B+\beta(x)$$

Отсюда получаем:

$$A+\alpha(x)=B+\beta(x)$$

$$A-B=\beta(x)-\alpha(x)$$

Выражение $A - B$ является постоянной величиной, а справа находится разница бесконечно малых, которая является бесконечно малой. Это означает, что постоянная равна нулю:

$$A - B = \beta(x) - \alpha(x) = 0$$

$$A = B$$

Нами доказана единственность предела функции.

Предел суммы функций

В этой и последующих теоремах мы полагаем в качестве условия, что имеются две функции $f(x)$ и $g(x)$, которые имеют пределы при $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = B$$

Теорема 4-9 (предел суммы двух функции). Предел суммы двух функций равен сумме пределов:

$$\lim_{x \to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

Доказательство. Представим функции в окрестности точки $x = a$ в виде суммы предела и бесконечно малой:

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

$$g(x) = B + \beta(x)$$

Тогда

$$f(x) + g(x) = (A + B) + \alpha(x) + \beta(x)$$

В последнем выражении сумма бесконечно малых есть бесконечно малая. Это означает, что сумма функций имеет пределом сумму $A + B$.

Предел произведения и частного

Теорема 4-10 (предел произведения двух функции). Предел произведения двух функций равен произведению пределов:

$$\lim_{x \to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a}\left(C\cdot f(x)\right) = C\cdot\lim_{x\to a} f(x)$$

Теорема 4-11 (предел частного двух функции). Предел частного двух функций равен частному пределов, если предел делителя не равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

В случае, если верхний предел не равен нулю, то имеются очевидные соотношения (при $C > 0$):

$$\frac{C}{+0} = +\infty$$

$$\frac{C}{-0} = -\infty$$

Теорема 4-12 (теорема о двух милиционерах для функции). Если в некоторой окрестности точки $x = a$ функция $f(x)$ заключена между двумя другими функциями $g(x)$ и $h(x)$, имеющими один тот же предел A при $x \to a$:

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$$

то функция $f(x)$ имеет тот же предел:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

4-4 Замечательные пределы

Первый замечательный предел

Теорема 4-13 (первый замечательный предел). Справедливо равенство:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

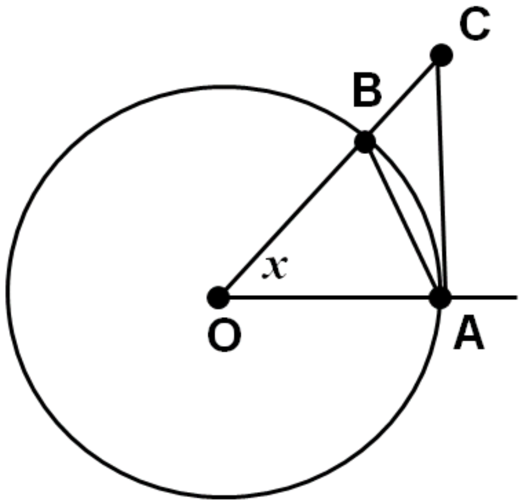


Рисунок 4-2. Геометрическое доказательство первого замечательного предела.

Доказательство. Проведем геометрическое доказательство, основанное на очевидном соотношении между тремя площадями:

$$S_{\Delta\, AOB} < S_{\text{сектор}\, AOB} < S_{\Delta\, AOC}$$

Нами выбран круг единичного радиуса и угол x, выраженный в радианах, в интервале от 0 до $\pi/2$. Найдем три указанные площади и подставим в имеющееся неравенство:

$$\frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin x < \frac{1}{2} R^2 \cdot x < \frac{1}{2} OA \cdot AC$$

Преобразовываем:

$$\frac{1}{2} R^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2} R^2 \cdot x < \frac{1}{2} R^2 \cdot \operatorname{tg} x$$

Сокращаем:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Затем делим на $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Так как предел косинуса при $x \to 0$ равен 1, то интересующий нас предел оказался заключен между двумя другими, имеющими одинаковый предел. Тогда по теореме о двух милиционерах доказано, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Пример 4-6 (вычисление предела с использованием первого замечательного предела). Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$$

Воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{2}{5}$$

Второй замечательный предел

Теорема 4-13 (второй замечательный предел). Число e является пределом следующей последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Число e, называемое также числом Эйлера, играет важную роль в математическом анализе. Оно примерно равно 2,718.. Логарифмы по основанию e называются *натуральными* и обозначаются $\ln x$, график функции $y = e^x$ получил название *экспоненты*.

Для функций верны следующие утверждения:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Пример 4-7 (вычисление предела с использованием второго замечательного предела). Вычисляем предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^2 = e$$

Термины

Предел функции	Limit of Function
Бесконечно большая величина	Infinite Quantity
Бесконечно малая величина	Infinitesimal
Односторонний предел	One-Sided Limit
Порядок малости	Infinitesimal Order

Формулы и обозначения

$\lim_{x\to a} f(x) = A$	Предел функции в точке
$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$	ε-окрестность точки A
$\alpha(x) \sim \beta(x)$	Эквивалентность б.м.
$f(x) = A + \alpha(x)$	Представление функции
$\lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$	Предел суммы
$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$	Предел произведения
$\lim_{x\to a}\big(C\cdot f(x)\big) = C\cdot \lim_{x\to a} f(x)$	Внесение константы
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$	Предел частного
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	Первый замечательный предел
$\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	Второй замечательный предел

Контрольные вопросы

1. Что называется пределом функции в бесконечности?
2. Приведите пример предела функции в точке.
3. В чем состоит геометрический смысл предела функции в точке? В бесконечности?
4. Что такое предел функции справа? Приведите пример.
5. Дайте определение бесконечно малой величины.
6. Докажите, что произведение бесконечно малой на постоянную величину есть бесконечно малая величина.
7. Как связаны между собой бесконечно малые и бесконечно большие величины?
8. Какие бесконечно малые величины называются эквивалентными? Для чего необходима таблица эквивалентности?
9. Перечислите основные теоремы о пределах. Как они используются?
10. Докажите первый замечательный предел. Какая теорема о пределах функций использована в доказательстве?